

Modellgestützte instationäre Unwuchtidentifikation

Benjamin Siegl¹, Richard Markert²

¹ Fachgebiet Strukturtechnik, TU Darmstadt, 64287 Darmstadt, siegl@sdv.tu-darmstadt.de

² Fachgebiet Strukturtechnik, TU Darmstadt, 64287 Darmstadt, markert@sdv.tu-darmstadt.de

Kurzfassung

In diesem Beitrag wird ein Unwuchtidentifikationsverfahren im Zeitbereich beschrieben, das aus nur einem instationären Messlauf ohne Testunwuchtsatz die statische und die kinetische Unwucht berechnet. Die Besonderheit gegenüber vorherigen Arbeiten ist, dass die Systemmatrizen in den Bewegungsgleichungen sich während des Hoch- oder Auslaufs mit der Drehzahl ändern dürfen. Es ist somit möglich, die Systemänderungen durch Kreiselwirkung und Gleitlager beim Hoch- oder Auslauf zu berücksichtigen. Die Funktionsweise und die Güte des Identifikationsverfahrens werden anhand synthetisch generierter Zeitsignale eines einfachen Rotors mit Kreiselwirkung verdeutlicht.

Wegen der Drehzahlabhängigkeit der Systemmatrizen ändern sich die Eigenwerte und die Eigenvektoren sowie die (generalisierten) modalen Massen mit der Drehzahl. Für eine zufriedenstellende Unwuchtidentifikation ist es daher erforderlich, die Änderungen dieser modalen Größen mit zu berechnen bzw. hinreichend genau zu schätzen. Mit den drehzahlabhängigen modalen Größen wird eine numerische Simulation im Modalraum durchgeführt.

Der eigentliche Algorithmus zur Unwuchtidentifikation basiert auf der Minimierung der Fehlerquadratsumme des in den drehzahlveränderlichen Modalraum transformierten gemessenen Zeitsignals und des Zeitsignals aus der Simulation. Er wird abgebrochen, wenn eine zufriedenstellende Genauigkeit erreicht und damit die Unwuchtdynamik bekannt ist. An die Anfangsparameter werden keine besonderen Anforderungen gestellt.

Symbolliste

Lateinische Buchstaben

a	generalisierte modale Masse
A	Systemmatrix im Zustandsraum
c	Laufzahl für Zeitstützstellen
C	Anzahl der Zeitstützstellen
b	Dämpfungskoeffizient, N s/m, N s m
B	Dämpfungsmatrix; Eingangsmatrix
f	Erregervektor
G	gyroskopische Matrix
K	Steifigkeitsmatrix
k	Steifigkeitskoeffizient, N/m, N, N m
l	Länge, m
m	Masse, kg
M	Massenmatrix
N	zirkulatorische Matrix
q	generalisierte Koordinaten, m
R	Residuum, mm
u	Erregervektor im Zustandsraum
t	Zeit, s
U	Unwucht, kg m

U Matrix der Unwuchten

v	horizontale Verschiebung, m
w	vertikale Verschiebung, m
x	Zustandsvektor, phys. Raum, m, m/s
X	Modalmatrix

Griechische Buchstaben

α	Anfahrbeschleunigung, 1/s ²
β	Aufkeilwinkel der Scheibe
γ	Phasenwinkel der Aufkeilung
δ	Phasenwinkel der Exzentrizität
ε	Exzentrizität, m
θ	Spaltenmatrix der Optimierungsgrößen
Θ	Massenträgheitsmoment, kg m ²
λ	Eigenwert, 1/s
φ	Drehwinkel des Rotors
ξ	Modaler Zustandsvektor
v	Referenzsignal der Drehbewegung
ω	Eigenkreisfrequenz, 1/s
Ω	Drehkreisfrequenz, 1/s

Indizes

a	axial
b	Bezugs-
n	n -te
p	polar
W	Wellendurchstoßpunkt
φ	Rotation betreffend
ξ, v	im modalen Zustandsraum
0	Anfangs-

Operatoren

diag	Diagonalmatrix
$\dot{}$	Zeitableitung
$\hat{}$	Eigenvektor
$\hat{}^R$	Messung
$\hat{}^R$	Rechtseigen-
$\hat{}^L$	Linkseigen-
$\hat{}^T$	Transponiert

1 Einleitung

Das Auswuchten von Rotoren ist eine gängige und erforderliche Maßnahme, um die Lebensdauer und Effizienz von Maschinen sicher zu stellen. Die Auswuchtaufgabe stellt sich infolge von Unwuchten aufgrund der Abweichung der Rotationsachse von einer zentralen Hauptträgheitsachse des Rotors. Dies äußert sich in sogenannten Unwuchten, die als umlaufende (Schein-)Kräfte zu – meistens unerwünschten – Schwingungen und/oder Lagerkräften führen. Um der Maschine zu einem ruhigen Lauf zu verhelfen, wird Material derart aufgebracht oder abgetragen, dass die Unwucht kompensiert wird. Dazu ist die experimentelle Ermittlung des Unwuchtzustandes nötig.

Bei Rotorsystemen können sich, z. B. aufgrund von Effekten aus der Lagerung oder der Kreiselwirkung, die im Allgemeinen unsymmetrischen Systemmatrizen mit der Drehzahl ändern. Dadurch werden die Eigenwerte, modalen Massen sowie die Rechts- und die wegen der Unsymmetrie davon abweichenden Linkseigenvektoren drehzahlabhängig.

In diesem Beitrag wird die Eignung der modellgestützten Unwuchtidentifikation aus einem instationären Messlauf für Rotorsysteme mit drehzahlabhängigen unsymmetrischen Systemmatrizen nachgewiesen. Die generelle Machbarkeit modellbasierter System- und Unwuchtidentifikation aus instationären Messläufe wies MARKERT mit einem Verfahren im Frequenzbereich nach [1]. Für drehzahlunabhängige symmetrische Matrizen wurde schon von SEIDLER das Potenzial der instationären Auswuchtmethode im Zeit- und Frequenzbereich aufgezeigt [2]. Eine Anwendung des Verfahrens im Zeitbereich auf Abgasturbolader mit Hilfe von stückweise als konstant angenommenen Eigenvektoren hat KRESCHEL rein theoretisch untersucht [3].

2 Modellbildung

2.1 Allgemeine Modellierung von Rotoren

Die Bewegung jedes linearen mechanischen Systems kann allgemein durch die Differentialgleichung

$$M \ddot{q} + (B+G) \dot{q} + (K+N) q = f \quad (1)$$

beschrieben werden [4, 5]. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die gyroskopische Matrix $G(\dot{\varphi})$ und die zirkulatorische Matrix $N(\ddot{\varphi})$ schiefsymmetrisch sind, während die Matrizen B und K den korrespondierenden symmetrischen Anteil darstellen. Für Rotoren sind die Summen $[B+G(\dot{\varphi})]$ und $[K+N(\ddot{\varphi})]$ im Allgemeinen drehzahlabhängig [6], insbesondere bei Rotoren in Gleitlagern oder mit ausgeprägter Kreiselwirkung. Beim instationären Betrieb eines Rotors folgen daraus in Gleichung (1) zeitabhängige unsymmetrische Systemmatrizen.

Diese allgemeine Bewegungsgleichung (1) wird gemäß

$$A_1 \dot{x} + A_0 x = u \quad \text{mit} \quad A_1 = \begin{bmatrix} B+G & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} K+N & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad u = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

in einen Zustandsraum physikalischer Koordinaten mit dem Zustandsvektor $x^T = [q^T, \dot{q}^T]$ überführt. Dieser Zustandsraum wird in einen drehzahl- und damit zeitabhängigen modalen Zustandsraum mit dem modalen Zustandsvektor ξ überführt, der mit dem Zustandsvektor des physikalischen Raums gemäß

$$X^R \xi = x \quad (3)$$

zusammenhängt. Hierbei stellt $X^R(t)$ die Rechtsmodalmatrix dar, die wegen der Drehzahl- und der daraus folgenden Zeitabhängigkeit der Matrizen $A_1(t)$ und $A_0(t)$ ebenfalls zeitabhängig ist. Bei der Zeitableitung von Gleichung (3) ist die zeitliche Änderung der Rechtsmodalmatrix \dot{X}^R vernachlässigbar, woraus folgt

$$\dot{X}^R \approx 0 \quad \implies \quad X^R \dot{\xi} = \dot{x}. \quad (4)$$

Wegen ihrer Unsymmetrie werden die Zustandsraummatrizen $A_1(t)$ und $A_0(t)$ nun von links mit der transponier-

ten Linksmodalmatrix $\mathbf{X}^{LT}(t)$ multipliziert und es folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{LT}\mathbf{A}_1\mathbf{X}^R &= \text{diag}\{\dots, a_n, \dots\} \quad \text{und} \\ \mathbf{X}^{LT}\mathbf{A}_0\mathbf{X}^R &= -\text{diag}\{\dots, \lambda_n a_n, \dots\}\end{aligned}\quad (5)$$

aus den Orthogonalitätsbeziehungen [7]. In diesem modalen Zustandsraum sind $a_n(t)$ die generalisierten modalen Massen und $\lambda_n(t)$ die Eigenwerte. Zur abschließenden Darstellung werden nun noch die Systemmatrix

$$\mathbf{A}_\xi(t) = \text{diag}\{\lambda_n(t)\}$$

und die Erregermatrix

$$\mathbf{B}_v(t) = \text{diag}\{1/a_n(t)\}\mathbf{X}^{LT}\mathbf{U}$$

im zeitveränderlichen modalen Zustandsraum sowie als Referenzsignal der Drehbewegung

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{bmatrix}\quad (6)$$

gemäß [8] eingeführt. In der Matrix \mathbf{U} ist der gesuchte Unwuchtzustand mit Betrag und Phase der statischen und der dynamischen Unwucht enthalten. Damit hat die modale Darstellung der Dynamik von Rotoren allgemeiner Art mit mehreren Freiheitsgraden die geläufige Form

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}_\xi(t)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}_v(t)\ddot{\mathbf{v}}.\quad (7)$$

Abhängig von den Effekten, die berücksichtigt werden müssen, ergeben sich unterschiedliche Matrizen in Gleichung (1). Der spezielle Fall für einen Einscheibenrotor mit Kreiselwirkung wird in Abschnitt 3 behandelt.

2.2 Algorithmus

Der im Zeitbereich arbeitende Algorithmus zur Identifikation ist in Bild 1 dargestellt: An einem instationär betriebenen unwuchtigen Rotor werden Bestandteile des Zustandsvektors $\tilde{x}_n(t)$ gemessen. In diesem Beitrag werden synthetisch generierte Zeitsignale als Messungen behandelt, um den Algorithmus auf seine prinzipielle Funktionsfähigkeit zu untersuchen. Aus den gemessenen Signalen generiert man sich den Zustandsvektor bestehend aus den Verschiebungen $\tilde{q}_n(t)$ und deren Zeitableitungen $\dot{\tilde{q}}_n(t)$. Zudem werden als Drehwinkelreferenz der Sinus und der Kosinus des Drehwinkels φ gemessen [8]. Für den Start der Identifikation sind möglichst genaue Schätzwerte für die Eigenfrequenzen ω_n , die Dämpfungen D_n sowie die Rechts- und Linkseigenvektoren \hat{x}_n^R bzw. \hat{x}_n^L und deren Drehzahlabhängigkeiten vorzugeben. Die modalen Größen werden in diesem Beitrag als bekannt vorausgesetzt, können im praktischen Einsatz jedoch aus Experimentellen Modalanalysen oder FE-Berechnungen stammen.

Nun werden die Zeitverläufe der modalen Koordinaten $\boldsymbol{\xi}$ im genäherten modalen Zustandsraum des Rotors aus Gleichung (7) durch numerische Integration ermittelt. Mit Hilfe von Gleichung (3) werden diese Zeitverläufe in den physikalischen Raum zurücktransformiert. Aus den Vektoren der physikalischen Koordinaten $\mathbf{q}(t)$ und $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ an C Zeitstützstellen t_c wird schließlich der Residuenvektor

$$\mathbf{R}(t_c) = \mathbf{q}(t_c) - \tilde{\mathbf{q}}(t_c)\quad (8)$$

gebildet. Zur Identifikation wird der quadratische Fehler, berechnet aus der quadratischen Norm dieses Residuenvektors an jeder Zeitstützstelle, mit einem nichtlinearen Optimierungsalgorithmus (in diesem Fall `lsqnonlin` aus der Programmbibliothek „Optimization Toolbox“ von MATLAB) durch wiederholte gradientenbasierte Anpassung der modalen Parameter und der Unwuchten in \mathbf{U} minimiert [9],

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{c=1}^C |\mathbf{R}(t_c)|^2 \implies \boldsymbol{\theta}.\quad (9)$$

Man erhält am Ende den Vektor des optimalen Parametersatzes θ , der auch die gesuchten Unwuchten und deren Phasen enthält.

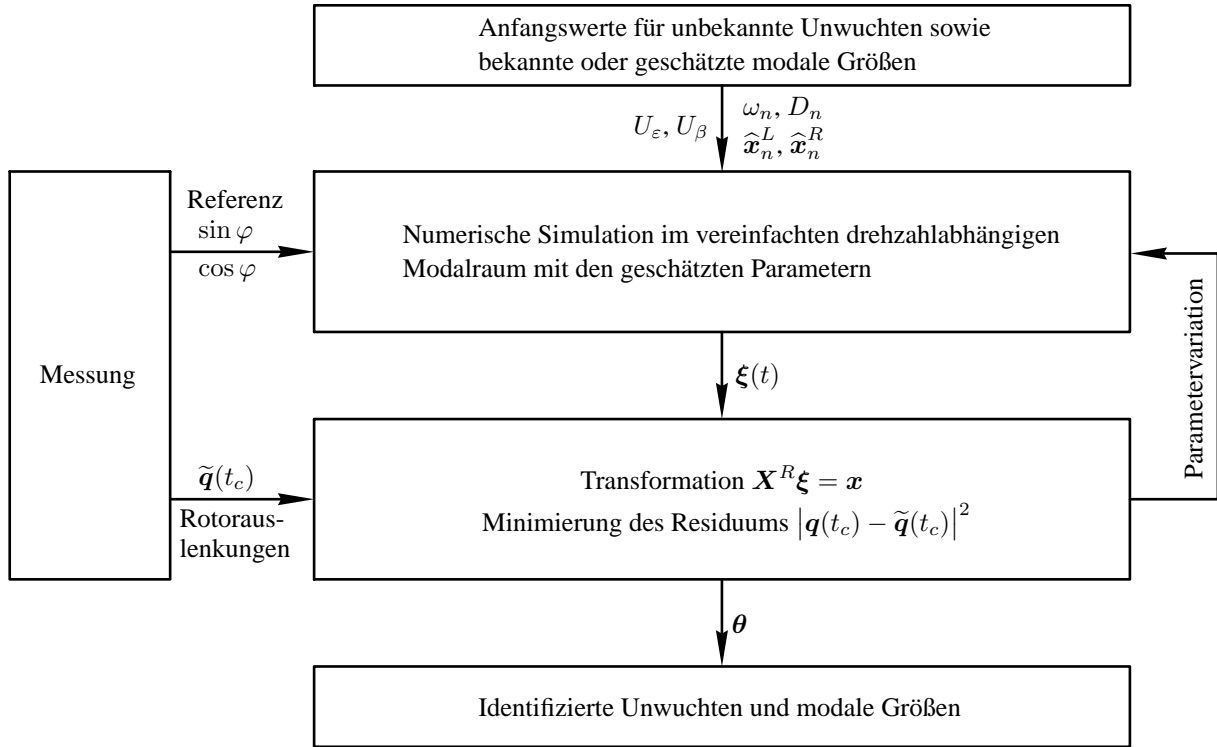


Bild 1: Flussbild für die Unwuchtidentifikation im Zeitbereich

3 Test an einem Rotor mit Kreiselwirkung

Der Einscheibenrotor mit Kreiselwirkung soll hier als Testobjekt für den Algorithmus dienen. Das Verhalten eines solchen Rotors ist in Lehrbüchern, wie z. B. GASCH [6], hinreichend beschrieben.

3.1 Das Rotormodell

Beim Einscheibenrotor mit Kreiselwirkung ist der Einfluss der zirkulatorischen Matrix N selbst bei der großen Drehbeschleunigung $\alpha = 3.2 (2\pi/s)^2$ verschwindend gering [10]. Somit lauten die Matrizen für die Bewegungsgleichung (1) mit dem Koordinatenvektor $\mathbf{q} = [w_W \ v_W \ -l_b \varphi_z \ l_b \varphi_y]^T$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_a/l_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_a/l_b^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} + \mathbf{G} = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_\varphi & -\Theta_p/l_b^2 \dot{\varphi} \\ 0 & 0 & \Theta_p/l_b^2 \dot{\varphi} & b_\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{12}/l_b \\ 0 & k_{11} & k_{12}/l_b & 0 \\ 0 & k_{12}/l_b & k_{22}/l_b^2 & 0 \\ k_{12}/l_b & 0 & 0 & k_{22}/l_b^2 \end{bmatrix}.$$

Im Koordinatenvektor bezeichnet w_W die vertikale und v_W die horizontale Verschiebung des Wellendurchstoßpunktes, $-l_b \varphi_z$ und $l_b \varphi_y$ sind mit einer Bezugslänge l_b multiplizierte Verkippungen der Scheibe um die vertikale z - und die horizontale y -Achse. Der Erregervektor für die Unwuchterregung infolge einer Exzentrizität $|\varepsilon|$ mit dem

Phasenwinkel δ und einer schrägen Aufkeilung der Scheibe $|\beta|$ unter dem Phasenwinkel γ lautet

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} |U_\varepsilon| \cos \delta & |U_\varepsilon| \sin \delta \\ |U_\varepsilon| \sin \delta & -|U_\varepsilon| \cos \delta \\ -|U_\beta| \cos \gamma & -|U_\beta| \sin \gamma \\ |U_\beta| \sin \gamma & -|U_\beta| \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

und enthält die statische Unwucht $U_\varepsilon = m |\varepsilon| e^{i\delta}$ und die dynamische Unwucht $U_\beta = (\Theta_a - \Theta_p) |\beta| e^{i\gamma} / l_b$. Der Gewichtseinfluss lässt sich in der Messung durch ein Hochpassfilter ausblenden und wird daher nicht berücksichtigt.

Die sich zeitlich ändernden Modaldaten dieses Rotors werden durch Geraden angenähert. In Bild 2 sind beispielhaft die Eigenfrequenzen (links) und die Beträge der Einträge eines ausgewählten Eigenvektors und deren Näherungen als Geraden über der Drehzahl dargestellt. Ob eine solche lineare Approximation in erster Näherung zweckmäßig ist, wird später untersucht.

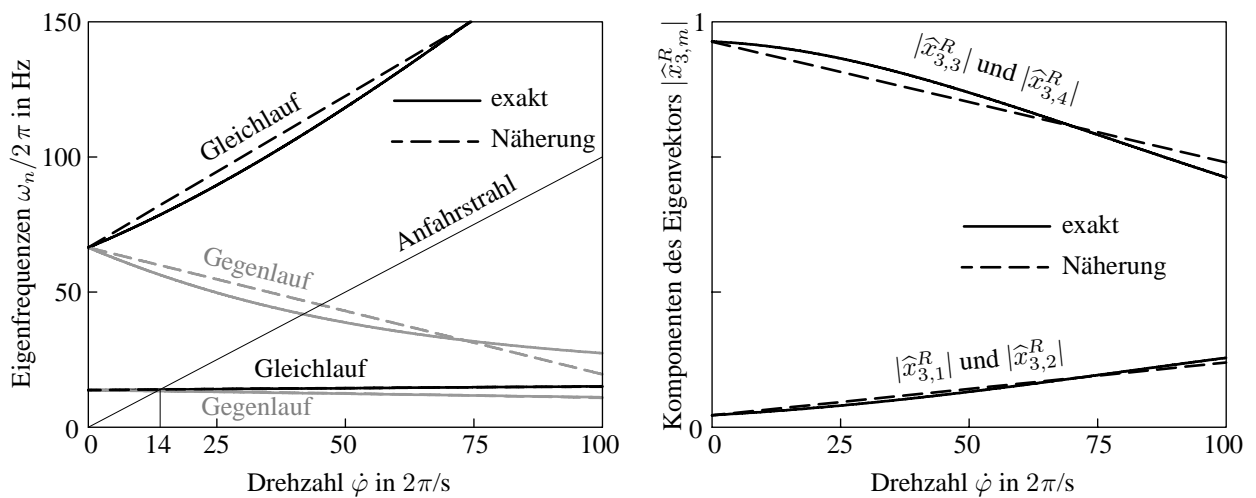


Bild 2: Eigenfrequenzen (links) und Beträge der Einträge des dritten Rechtseigenvektors (rechts) in Abhängigkeit von der Drehzahl

Die für diesen Beitrag verwendeten Rotordaten sind der Tabelle 1 zu entnehmen. Sie sind an die Daten der Arbeit von WEGENER [11] angelehnt.

Tabelle 1: Rotordaten

m	Θ_p	Θ_a	b	b_φ	k_{11}	k_{12}	k_{22}	l_b
2.55	$10.7 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	5.4	0.2	$2.9 \cdot 10^4$	$3.3 \cdot 10^3$	$1.1 \cdot 10^3$	0.255
kg	kg m^2	kg m^2	Ns/m	Nsm	N/m	N	Nm	m

Die linear in der Drehzahl genäherten Modaldaten bewirken geringe Abweichungen in den Simulationsergebnissen. Durch die Vereinfachung wird allerdings die Möglichkeit eröffnet, die Drehzahlabhängigkeit im Algorithmus (siehe Bild 1) zuzulassen und die einzelnen Größen als lineare Funktionen mitzuentwickeln. Durch die Simulation im Modalraum ist es zudem möglich, die nicht durch die Unwucht angeregten und damit kaum identifizierbaren Moden (wie z. B. die Gegenlaufmoden) aus den Modalmatrizen zu streichen und eine Modellreduktion vorzunehmen.

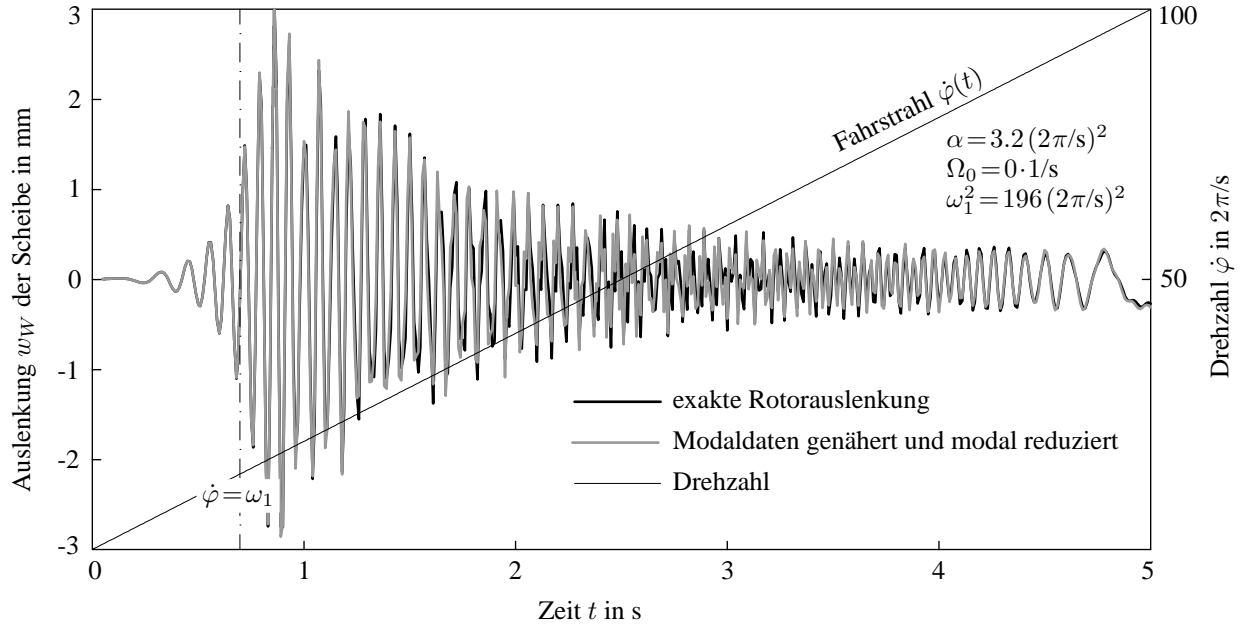


Bild 3: Vergleich der Scheibenauslenkungen $w_W(t)$ bei einem Hochlauf mit und ohne modale Reduzierung bei genäherten Modaldaten als Gerade

Bild 3 zeigt die Abweichung der vertikalen Rotorauslenkung w_W eines um die Gegenlaufmoden reduzierten Rotors mit linear genäherten Modaldaten von denen eines ohne Vereinfachungen simulierten Einscheibenrotors mit Kreiselwirkung während eines gleichmäßig beschleunigten Hochlaufs vom Stillstand auf $\dot{\varphi}_{max} = 100 \cdot 2\pi/s$. Der Gleichgewichtszustand des stehenden Rotors bei $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0 = 0$ dient zur Ermittlung der Startwerte für die Identifikationsalgorithmen. Es ist zu erkennen, dass die modale Reduktion und die lineare Näherung der Modaldaten zulässig ist, insbesondere in der Resonanz bei etwa 1 s. Beide Rechnungen wurden mit derselben Unwucht $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ m und $\beta = 0$ durchgeführt. In diesem Beitrag werden zudem die linear in der Drehzahl genäherten Modaldaten zum Test des Algorithmus' als bekannt vorausgesetzt.

3.2 Ergebnisse

Die numerische Simulation des Rotors im physikalischen Raum (schwarze Kurve in Bild 3) wird zum Test der Unwucht wie eine Messung behandelt. Die vorgegebene zu identifizierende Unwuchtdynamik lautet

$$U_\varepsilon = m\varepsilon = 7.65 \cdot 10^{-4} \text{ kg m} \quad \text{und} \quad U_\beta = (\Theta_a - \Theta_p)\beta/l_b = 0 \text{ kg m}.$$

Als Startwerte für die Unwuchtidentifikation werden im Parametervektor θ beide Unwuchten U_ε und U_β null gesetzt. Daraus ergibt sich zu Beginn der Optimierung an jeder Zeitstützstelle t_c ein Anfangsresiduum $\mathbf{R}_0(t_c)$. Der erste Eintrag $R_{01}(t_c)$ ist in Bild 4 grau dargestellt. Zur Bildung dieses Residuums gemäß Gleichung (8) werden in \mathbf{q} bzw. $\tilde{\mathbf{q}}$ die Verschiebungen w_W bzw. \tilde{w}_W und v_W bzw. \tilde{v}_W sowie die normierten Verkippen $-l_b \varphi_z$ bzw. $-l_b \tilde{\varphi}_z$ und $l_b \varphi_y$ bzw. $l_b \tilde{\varphi}_y$ der Scheibe verwendet.

Der Löser für das nichtlineare Optimierungsproblem aus Gleichung (9) bricht nach j Iterationsschritten ab, sobald die Änderung

$$\sum_{c=1}^C |\mathbf{q}(t_c) - \tilde{\mathbf{q}}(t_c)|_j^2 - \sum_{c=1}^C |\mathbf{q}(t_c) - \tilde{\mathbf{q}}(t_c)|_{j-1}^2 \leq 10^{-6} \text{ mm} \quad (10)$$

der quadratischen Residuenorm zwischen zwei Iterationsschritten hinreichend klein wird. Die dann noch verbleibenden Residuen an den Zeitstützstellen t_c sind in Bild 4 in schwarz dargestellt. Zu Beginn der Optimierung sind diese Residuen maximal (grau). Optimal wären Residuen nahe null. In diesem Fall ist zu erkennen, dass selbst verbleibende Residuen in der Größenordnung von 10% des Anfangsresiduums noch zufriedenstellende Wucht-

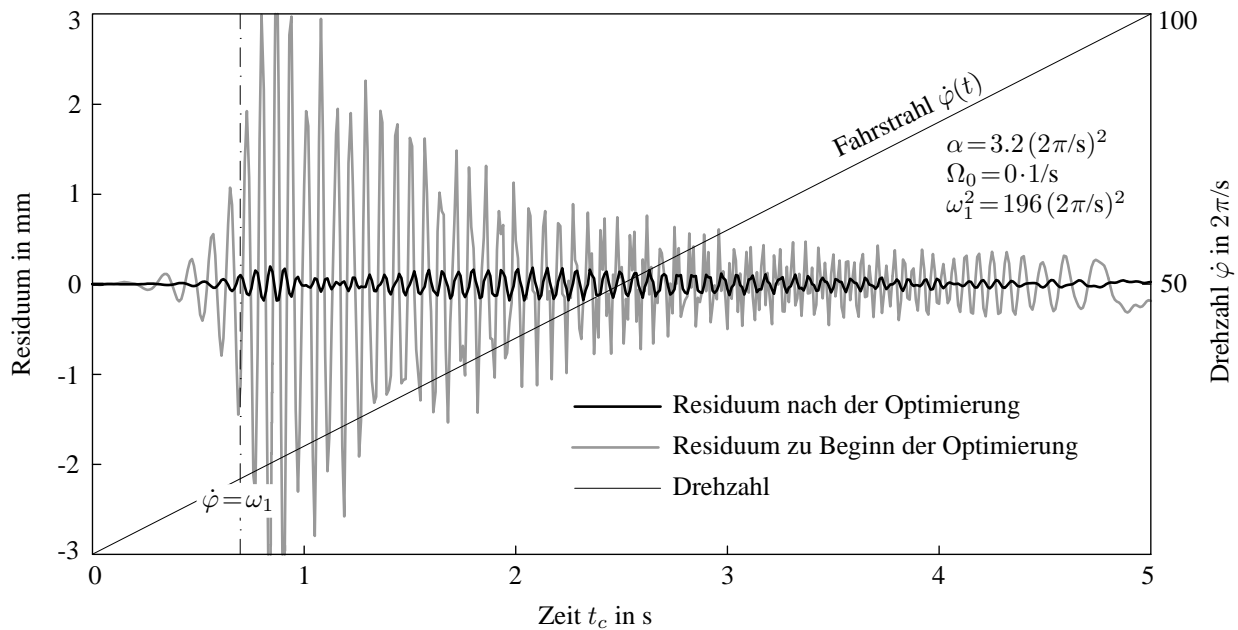


Bild 4: Residuen an allen Zeitstützstellen bei einem Hochlauf

ergebnisse liefern. Eine Verschärfung des Abbruchkriteriums für die Residuennorm aus Gleichung (10) führt zu keiner Verkleinerung der Residuen. Dies lässt darauf schließen, dass bei den erzwungenen Näherungen der Modaldaten keine bessere Modellanpassung erzielbar ist.

Die sich aus der Identifikation ergebenden Unwuchten sind in Tabelle 2 den tatsächlichen Unwuchten gegenübergestellt. Zudem sind die verwendeten Startwerte vermerkt. Die hier gewählten Anfangswerte für die Unwuchten sind mit $U_\varepsilon = U_\beta = 0$ die ungünstigste Konfiguration. Nichtsdestotrotz ist das Wuchtergebnis zufriedenstellend. Der Rechenzeitbedarf des gezeigten Algorithmus' liegt für diese Identifikation bei etwa 120 s auf einem INTEL Core i7 mit 3.4 GHz. Davon entfallen allerdings mehr als 100 s auf das Laden der Pseudo-Messdaten $\tilde{x}(t)$.

Tabelle 2: Ergebnis der Identifikation

	$ U_\varepsilon $	δ	$ U_\beta $	γ
Ziel	$7.65 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}$	0°	0 kg m	0°
Startwerte	0 kg m	0°	0 kg m	0°
Identifiziert	$7.49 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}$	9.9°	$\sim 0 \text{ kg m}$	$\sim 0^\circ$

4 Fazit und Ausblick

In diesem Beitrag wurde die Funktionsfähigkeit eines im Zeitbereich arbeitenden Algorithmus' zur modellgestützten Unwuchtidentifikation auf modaler Basis nachgewiesen. Die Robustheit der Ergebnisse gegenüber Vernachlässigung der Zeitableitung der Rechtsmodalmatrix sowie gegenüber einer einfachen linearen Näherung der modalen Parameter mit der Drehzahl ist die Grundlage für das Verfahren. Nun ist die Funktionsfähigkeit am Experiment nachzuweisen. Seine Toleranz gegenüber sehr unsicheren modalen Parametern muss in der Praxis gezeigt werden. Bei einer praxisnahen Umsetzung ist mit einer recheneffizienteren Umgebung als MATLAB, wie z. B. mit C, ein Gewinn hinsichtlich der Identifikationsdauer zu erwarten.

Literatur

- [1] MARKERT, Richard: System- und Unwuchtidentifikation von elastischen Rotoren aus Anfahrmessungen. In: *VDI-Berichte* 536 (1984), S. 121–139
- [2] SEIDLER, Malte: *Instationäres Auswuchten elastischer Rotoren*. VDI Verlag, Düsseldorf, Dissertation, 2002 (Reihe 11: Schwingungstechnik Nr. 314)
- [3] KRESCHEL, Martin: *Instationäres Verhalten von Abgasturboladern*. VDI Verlag, Düsseldorf, Dissertation, 2010 (Reihe 12: Verkehrstechnik, Fahrzeugtechnik Nr. 731). – ISBN 978–3–18–373112–1
- [4] MARKERT, Richard: *Strukturdynamik*. 1. Auflage. Aachen : Shaker, 2013. – ISBN 978–3–8440–2098–4
- [5] HAGEDORN, Peter ; HOCHLENERT, Daniel: *Technische Schwingungslehre*. 1. Auflage. Frankfurt am Main : Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, 2012. – ISBN 978–3–8085–5696–2
- [6] GASCH, Robert ; NORDMANN, Rainer ; PFÜTZNER, Herbert: *Rotordynamik*. 2. Auflage. Berlin : Springer, 2006. – ISBN 3–540–41240–9
- [7] GASCH, Robert: *Strukturdynamik: Diskrete Systeme und Kontinua*. Auflage: 2. Aufl. 2012. Berlin : Springer, 2012. – ISBN 978–3–540–88976–2
- [8] MARKERT, Richard: Modal Balancing of flexible rotors with data acquisition from non-stationary run-up or run-down. In: *Proceedings of the VI. International Modal Analysis Conference*. Orlando, Florida, 1988, S. 210–216
- [9] COLEMAN, Thomas F. ; LI, Y.: An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds. In: *SIAM Journal on Optimization* 6 (1996), S. 418–445
- [10] LAUZI, Matthias: *Theoretische Untersuchungen an Rotoren mit Kreiselwirkung / TU Darmstadt*. Darmstadt, 2012. – Seminararbeit
- [11] WEGENER, Georg: *Untersuchungen zum Kreiseinfluß auf den stationären und instationären Betrieb von elastischen Rotoren / TU Darmstadt*. Darmstadt, 1993. – Diplomarbeit